

Implementacija algoritma za brzu konvoluciju na SE(3) grupi



Autor: Gordan Kreković Mentor: Prof. dr. sc. Davor Petrinović
Zavod za elektroničke sustave i obradu informacija
Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu

1 Uvod

Teorija grupa predstavlja važan matematički model kojim se mogu formulirati različiti problemi u fizici i inženjerstvu. Tako sva gibanja u trodimenzionalnom euklidskom prostoru čine grupu koja se naziva posebnom euklidskom grupom gibanja, a označava sa SE(3). Ona se pojavljuje u mnogim primjenama u kojima gotovo uvijek dolazi do potrebe za izračunom konvolucije dviju funkcija definiranih na grupi. U klasičnoj teoriji harmonijske analize konvolucija se efikasnije računa u transformacijskoj domeni jer postoje brzi numerički algoritmi za Fourierovu transformaciju. Time je inspirirano poopćavanje pristupa na slučaj nekomutativne harmonijske analize na grupama. Grupa SE(3) prva je nekompatna nekomutativna Liejeva grupa koja je zanimljiva u primjenama i za čije su restrikcije na kompaktno ograničene domene osmišljeni brzi numerički algoritmi.

2 Opis problema

Američki su znanstvenici Alexander B. Kyatkin i Gregory S. Chirikjian prilikom rješavanja konkretnijeg problema određivanja radnog prostora robotske ruke shvatili da se numerički postupci, koje razvijaju, zapravo općenito odnose na konvoluciju funkcija na grupi SE(3). U okviru ovoga rada trebalo je razumjeti i implementirati njihov prijedlog algoritma pomoću MATLAB-a. Također, trebalo je istražiti i opisati moguće primjene algoritma.

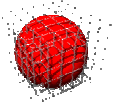
3 Metoda

Korištenjem nereducibilnih unitarnih reprezentacija u obliku operatora, formira se Fourierova transformacija na grupi gibanja kao integral na grupi produkta prostora SE(3) × S². Zapis elemenata Fourierove transformacijske matrice u integralnom obliku, kao i primjena interpolacije Kartezijevo na sferni koordinatni sustav, omogućava primjenu otprije razvijenih brzih algoritama za Fourierovu transformaciju na Y³, S² i SO(3).

Brza izravna SE(3) Fourierova transformacija funkcije f₁

1. **3D FFT**
 $f_1(R, \mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, R) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} d^3x$

2. **Interpolacija**



3. **FFT na grupi SO(3)**
 $(f_2)_{m', m}^{\nu}(p, \mathbf{u}) = \int_{SO(3)} f_1(R, \mathbf{p}, \mathbf{u}) U_{m', m}^{\nu}(R) dR$

4. **Integracije na S²**
 $\hat{f}_{\nu, m', m}^{\nu}(p) = \sum_{n=-l}^l \int_{S^2} (f_2)_{m', m}^{\nu}(p, \mathbf{u}) h_{\nu, n}^{\nu}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$

Brza izravna SE(3) Fourierova transformacija funkcije f₂

Koraci algoritma za brzu konvoluciju na SE(3) grupi

$$\sum_{j=|k|}^j \sum_{k=-j}^j (f_2)_{\nu, m', j, k}^{\nu}(p) (f_1)_{j, k, l, m}^{\nu}(p)$$

Brza inverzna SE(3) Fourierova transformacija umnoška

1. **Sumacije koeficijenata**
 $(g_1)_{\nu, m', n}^{\nu}(p, \mathbf{u}) = \sum_{l=|m|}^l \left[\sum_{m'=-l}^l \hat{f}_{\nu, m', l, m}^{\nu}(p) h_{\nu, m}^{\nu}(\mathbf{u}) \right] h_{\nu, n}^{\nu}(\mathbf{u})$

2. **Interpolacija**



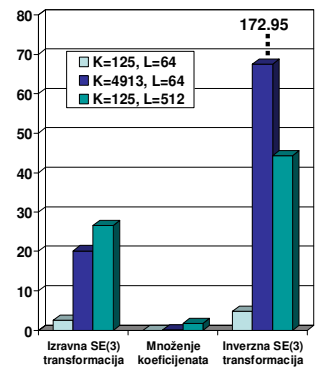
3. **3D FFT**
 $(g_2)_{\nu, m', n}^{\nu}(r) = \int_{\mathbb{R}^3} (g_1)_{\nu, m', n}^{\nu}(p) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d^3p$

4. **FFT na grupi SO(3)**
 $f(x, R) = \sum_{s=-S}^s \left[\sum_{l=|s|}^l \sum_{m'=-l}^l \sum_{m=-l}^l U_{m', m}^s(R) (g_2)_{\nu, m', n}^{\nu}(r) \right]$

4 Rezultati

Brza numerička konvolucija značajno je efikasnija od izravnog izračuna. Za N točaka uzorkovanja, složenost algoritma, koja u slučaju izravne implementacije konvolucijskog integrala iznosi O(N²), smanjena je na O(N^{γ/6}(log N)²) + O(N^{(γ+1)/3}) gdje parametar γ ovisi o učinkovitosti matricnog množenja, 2 ≤ γ ≤ 3.

U okviru rada izrađene su MATLAB funkcije za izravnu i inverznu SE(3) Fourierovu transformaciju te za izračun konvolucijskog integrala. Korištena je SOFT biblioteka za brzu SO(3) Fourierovu transformaciju te ugrađene MATLAB funkcije za spline interpolaciju i Fourierovu transformaciju na trodimenzionalnoj Kartezijevoj rešetki. Vremenski najkritičniji dijelovi implementacije koraci su u kojima zbog strukture matricnih elemenata nije bilo moguće iskoristiti efikasne ugrađene matricne operacije pa se one obavljaju ugniježđenim petljama. Kako grupa SE(3) ima šest dimenzija, veliki je problem implementacije algoritma memorijsko zauzeće.



Vremena izvođenja pojedinih koraka algoritma u sekundama za različite parametre uzorkovanja:
K – broj uzoraka na Y³
L – broj uzoraka na SO(3)

Izrađena implementacija potencijalno se može koristiti za određivanje radnog prostora robotske ruke, rješavanje inverznog kinematičkog problema diskretno pogonjenih manipulatora te izračune u statističkoj mehanici makromolekula.

5 Zaključak

Neki od problema vezani uz opisana područja primjene dosad nisu bili praktično rješivi zbog velike složenosti izravnog pristupa. Korištenjem brzog algoritma za konvoluciju, oni postaju značajno jednostavniji. Zbog visoke dimenzionalnosti domena, na kojima se definiraju funkcije i transformacijski koeficijenti, za zadovoljavajuće diskretne aproksimacije potrebno je utrošiti mnogo memorijskog prostora. Pozitivno svojstvo implementacije osobito bitno za daljnja poboljšanja laka je mogućnost paralelizacije.

Algoritam za brzu konvoluciju na SE(3) grupi izvrstan je primjer kako se matematički modeli mogu uspješno primijeniti u rješavanju inženjerskih problema. Povezivanje matematike i inženjerstva sigurno će ubrzati razvoj oba područja te unaprijediti svijet kojeg stvaramo i u kojem živimo!